



$$\begin{cases} 1 + \cos \theta = r \cos \frac{\theta}{r} \\ \sin \theta = r \sin \frac{\theta}{r} \cos \frac{\theta}{r} \end{cases} \Rightarrow A = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow A = r \cos \frac{\theta}{r} + i(r \sin \frac{\theta}{r} \cos \frac{\theta}{r}) = r \cos \frac{\theta}{r} (\cos \frac{\theta}{r} + i \sin \frac{\theta}{r}) = r \cos \frac{\theta}{r} e^{i(\frac{\theta}{r})}$$

$$\Rightarrow W = (1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n \cos^n \frac{\theta}{r} e^{i(n\frac{\theta}{r})} = r^n \cos^n \frac{\theta}{r} (\cos \frac{n\theta}{r} + i \sin \frac{n\theta}{r})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(w) = r^n \cos^n \frac{\theta}{r} \cos \frac{n\theta}{r}$$

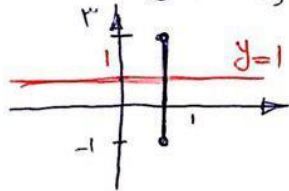
$$|z - 1 + i| = |z - 1 - 3i| \Rightarrow \frac{|z - 1 + i|}{|z - 1 - 3i|} = 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

به ترتیب به هم دایره آکوترونیوس و دایره خاص آن، چون $k=1$ است، عبارت فوق نشان

دهنده یک خط عمود منصف به خط وصل z_1, z_2 است.

$$\begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + 3i \end{cases}$$



روش دیگری برای حل سوال داریم،
آن چنانچه $z = x + iy$ است.

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x \Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} \quad (1)$$

$$\Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y - \sin^2 x \cosh^2 y + \cosh^2 y - 1 + \sin^2 x} = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}$$

از عبارت فوق معلوم است مقدار $|\sin z|$ از $\cosh y$ کوچکتر است. (از طرفی $|\sin z| \leq \cosh y$)

$$|\sin z| = \sqrt{1 + \sinh^2 y - \cos^2 x} = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$



Scanned with
CamScanner

شخصاً مقدار $|\sin z|$ از $|\sinh y|$ بزرگتر است. ($|\sin z| \geq |\sinh y|$)

نکته ۴
 با جدایی $x+iy = re^{i\theta}$ ، $x-iy = re^{-i\theta}$ ، از فرمول اول داریم :

$$z = \ln \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = \ln e^{2i\theta} = 2i\theta \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 2i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

نکته ۵
 با توجه به اینکه $\cos z = \cosh(iz)$ ، داریم :

$$\cos z = \cosh(iz) = 1 \Rightarrow iz = \cosh^{-1} 1 \Rightarrow z = -i \cosh^{-1} 1$$

حال با جدایی در فرمول $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ، خواهیم داشت :

$$z = -i \ln(1 + \sqrt{99}) = -i \ln(1 + 3\sqrt{11})$$

با توجه به اینکه $\cos z$ یک تابع متناوب است ، دوره تناوب آن 2π است ، جواب معادله خواهم کرد :

$$z = 2n\pi \pm i \ln(1 + 3\sqrt{11})$$